Jakub Juránek, UČO 393110

7.1.B12
Nechť $\varphi : V \to V'$ je injektivní lineární zobrazení. Dokažte, že platí:
$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé $\iff$ $\varphi(\mathbf{u}_1), \dots, \varphi(\mathbf{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé.

„$\Longrightarrow$“
Uvažme rovnici:

$$t_1 \cdot \varphi(\mathbf{u}_1) + \cdots + t_k \cdot \varphi(\mathbf{u}_k) = \mathbf{o}'$$

Pro libovolné lineární zobrazení platí $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}'$ a tedy dostáváme:

$$t_1 \cdot \varphi(\mathbf{u}_1) + \cdots + t_k \cdot \varphi(\mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{o})$$

Za použití definice lineárního zobrazení dostáváme:

$$\varphi(t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{o})$$

Nyní využijeme toho, že je φ injektivní a musí tedy platit:

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

Protože jsou ale vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, musí být $t_1 = \cdots = t_k = 0$.
Vektory $\varphi(\mathbf{u}_1), \dots, \varphi(\mathbf{u}_k)$ jsou tedy lineárně nezávislé.

„$\Longleftarrow$“
Tato implikace platí pro libovolné lineární zobrazení. Jedná se obměnu Věty 1.1.3.
Důkaz tedy jen ve zkratce:

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o} \;\Rightarrow\; \varphi(t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{o}) \;\Rightarrow\; t_1 \cdot \varphi(\mathbf{u}_1) + \cdots + t_k \cdot \varphi(\mathbf{u}_k) = \mathbf{o}'$$

Protože jsou vektory $\varphi(\mathbf{u}_1), \dots, \varphi(\mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislé, musí být $t_1 = \cdots = t_k = 0$.
Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou tedy lineárně nezávislé.